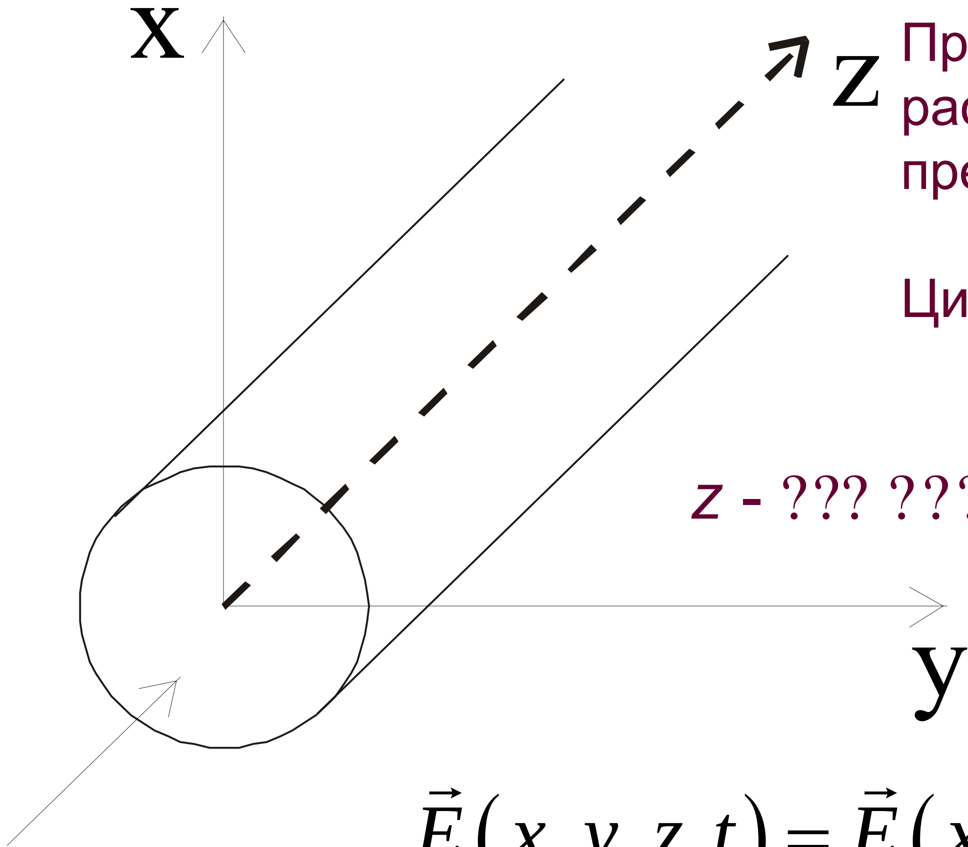
Оптические волноводы



Пространственно-неоднородное распределение показателя преломления *n*(*x*,*y*)

Цилиндрическая симметрия

z - ??? ?????????????? ??? ? ?????

n=n(x,y)

$$\vec{E}\left(x,y,z,t\right)=\vec{E}\left(x,y\right)\exp\left[i\left(\omega t-\beta z\right)\right]$$

$$\vec{H}\left(x,y,z,t\right)=\vec{H}\left(x,y\right)\exp\left[i\left(\omega t-\beta z\right)\right]$$

Волновое уравнение и свойства поля

$$\left\{\Delta_\perp + \left[\frac{\omega^2}{c^2} n^2(x,y) - \beta^2\right]\right\}\vec{E}(x,y) = 0 \qquad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Л??????ация поля (поле экспоненциально убывает ?? ??????????????): $\quad \Delta_\perp > 0$

$$\beta^2 > \frac{\omega^2}{c^2} n^2\left(\sqrt{x^2+y^2} \to \infty\right)$$

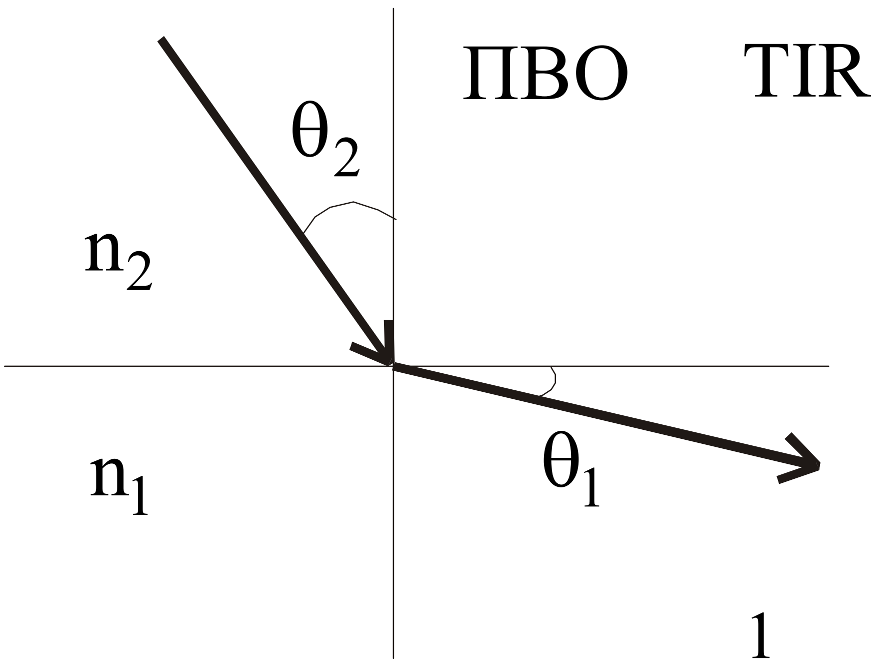
? области начала координат - ? ????? ?? : $\quad \beta^2 < \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x,y)$

$$\frac{\omega^2}{c^2} n^2(\infty) < \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x,y) \qquad n^2(\infty) < n^2(x,y)$$

Полное внутреннее отражение

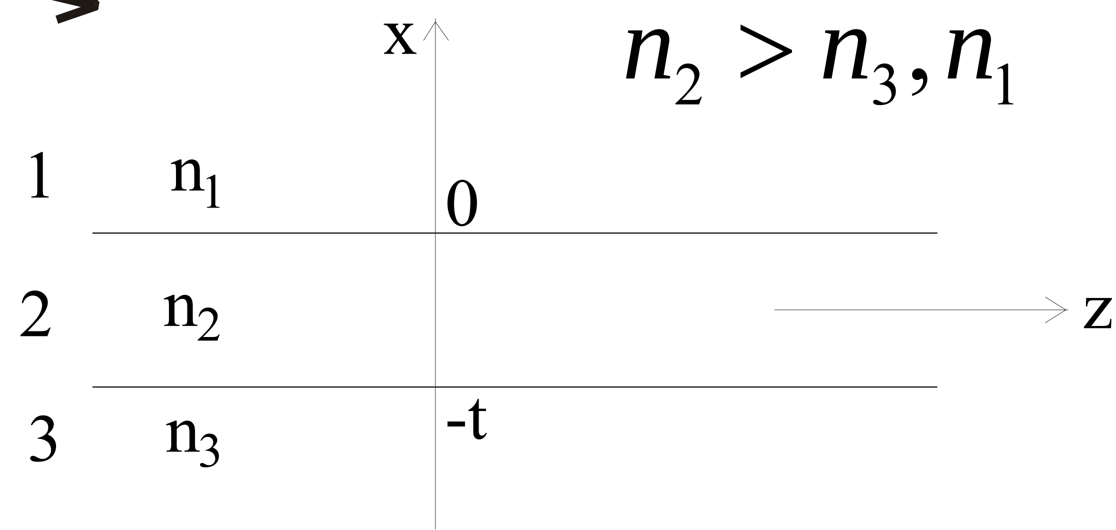
$$n^2(\infty) < n^2(x, y)$$

Физически эквивалентно полному внутреннему отражению



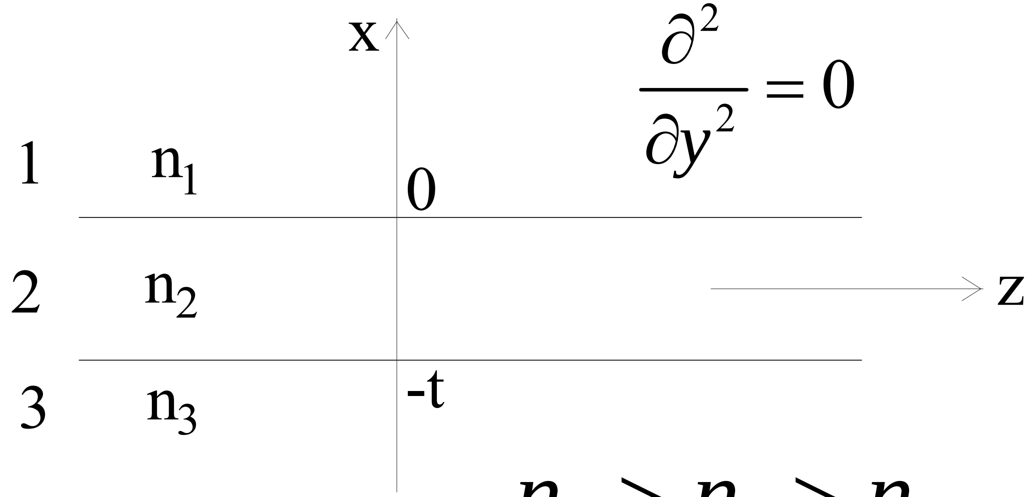
Планарный волновод

$$n_2 > n_3, n_1$$



Планарный волновод

$$n(x)=\begin{cases} n_1, x>0, \\ n_2, -t<x\le 0, \\ n_3, x\le -t. \end{cases}$$



$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=0$$

$$n_2>n_3>n_1$$

Область 1:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\left(k_0^2 n_1^2-\beta^2\right)E=0$$

Область 2:

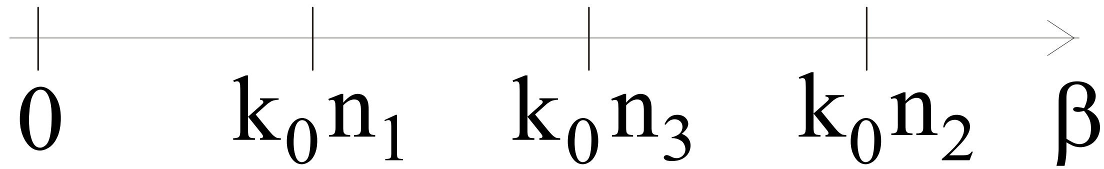
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\left(k_0^2 n_2^2-\beta^2\right)E=0$$

$$k_0=\frac{\omega}{c}$$

Область 3:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\left(k_0^2 n_3^2-\beta^2\right)E=0$$

Каким должна быть постоянная β?

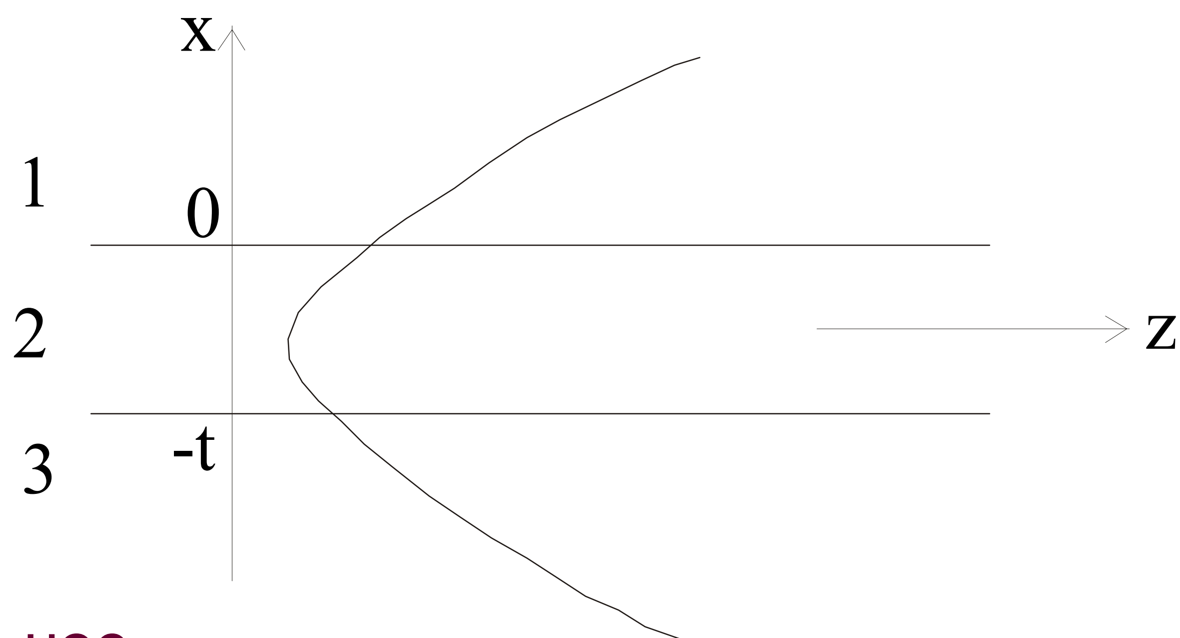


Случай 1

$$\left|\beta\right| > \left|k_0 n_2\right|$$

всюду

$$\frac{1}{E}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} > 0$$



Всюду экспоненциальное решение

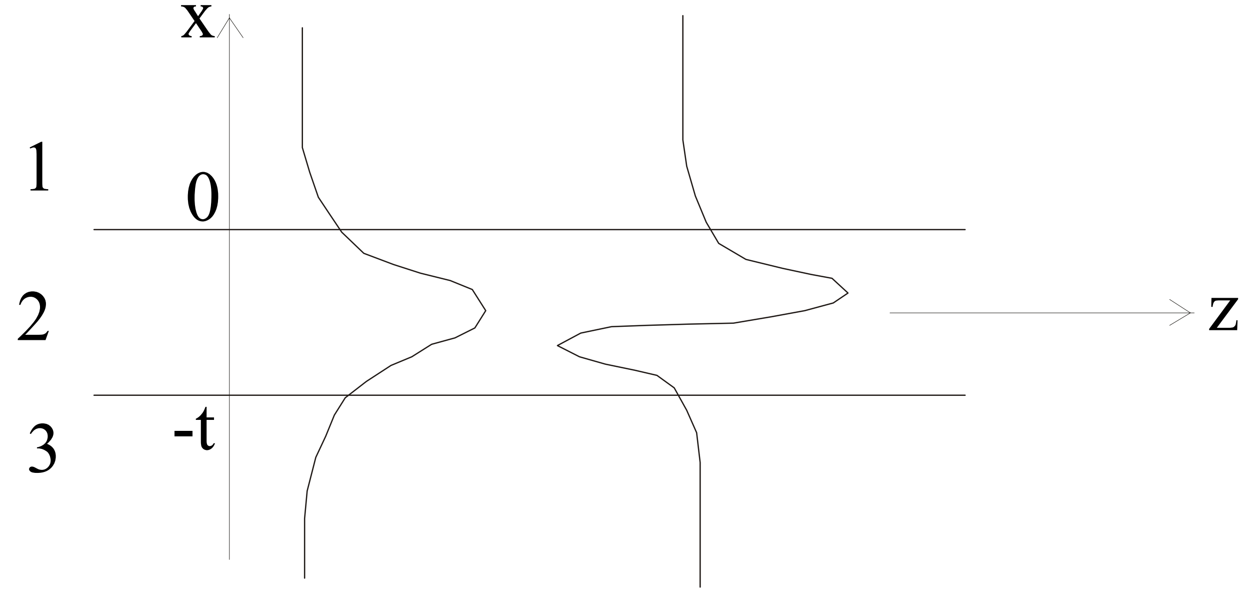
Физически нереализуемо

Каким должна быть постоянная β?

Случай 2 $$k_0 n_3 < \beta < k_0 n_2$$

Область 2: $$\frac{1}{E}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} < 0$$ Осциллирующее решение

Области 1, 3: экспоненциальное решение



Каким должна быть постоянная β?

Случай 3

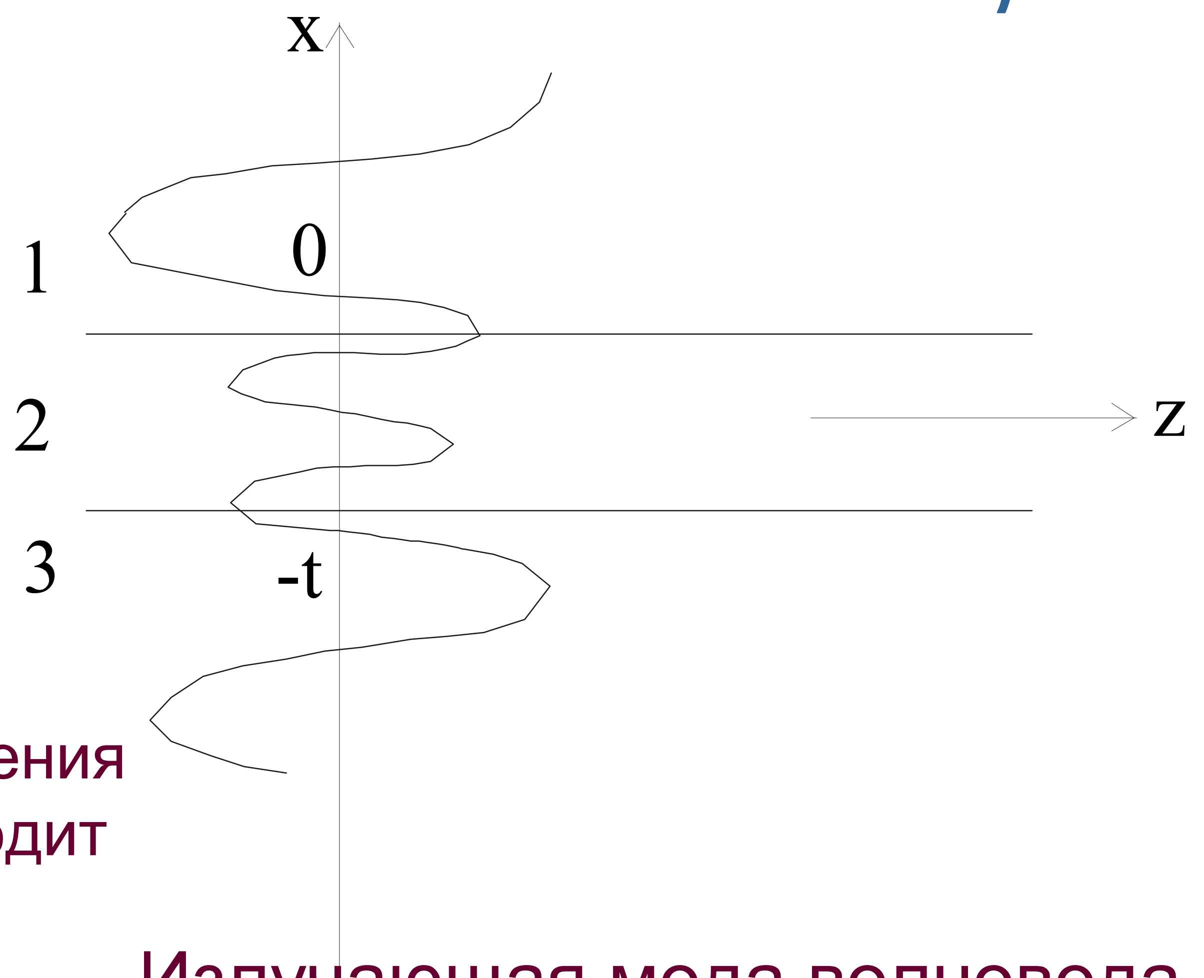
$$k_0 n_1 < \beta < k_0 n_3$$

Излучающая мода подложки

Каким должна быть постоянная β?

Случай 4

$$0 < \beta < k_0 n_1$$

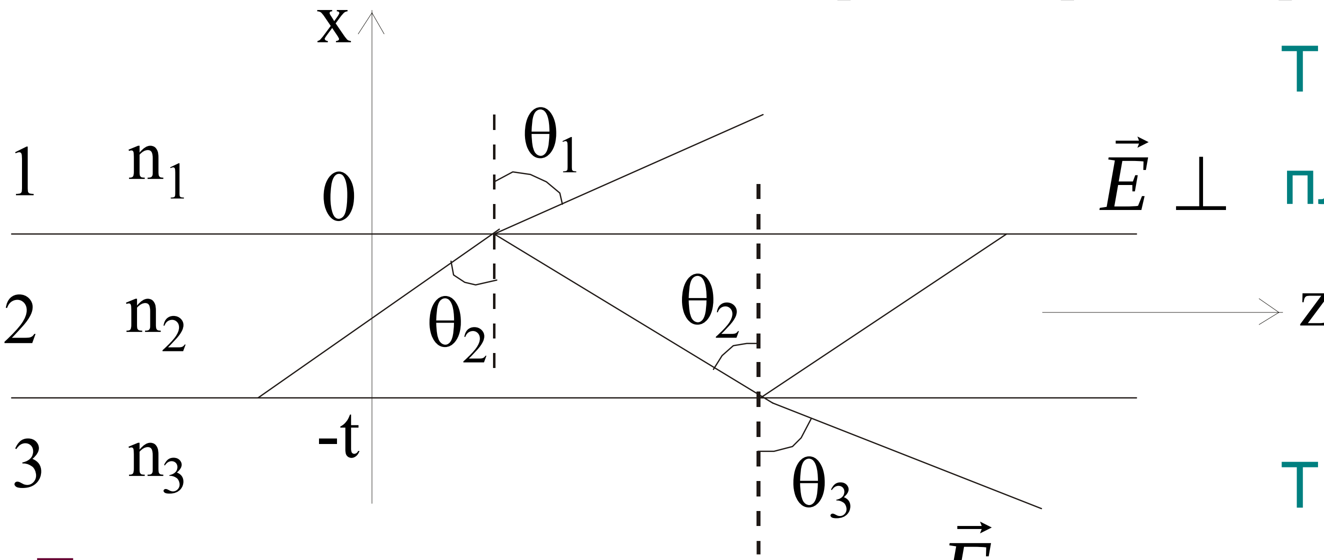


Для передачи излучения на расстояния подходит только случай 2:

$$k_0 n_3 < \beta < k_0 n_2$$

Излучающая мода волновода

Полное внутреннее отражение и волноводное распространение



ТЕ-мода:

$\vec{E} \perp$ плоскости падения

$$E_y, H_x, H_z$$

ТМ-мода:

$\vec{E}$ лежит в плоскости падения

$$E_x, E_z, H_y$$

Полное внутреннее отражение

$$\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2 > 1$$

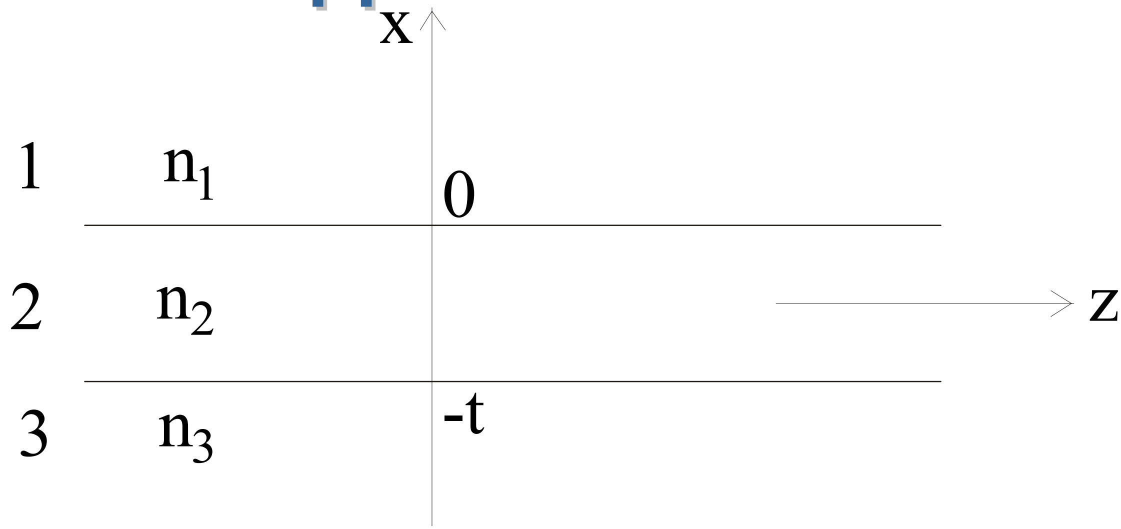
$$\frac{n_2}{n_1} > 1 \qquad \frac{n_2}{n_3} > 1$$

Мода – устойчивое состояние поля, характеризующееся определенным распределением амплитуды и поляризации

Решения для поля в планарном волноводе

$$n_2 > n_3 > n_1$$

$$k_0 n_3 < \beta < k_0 n_2$$

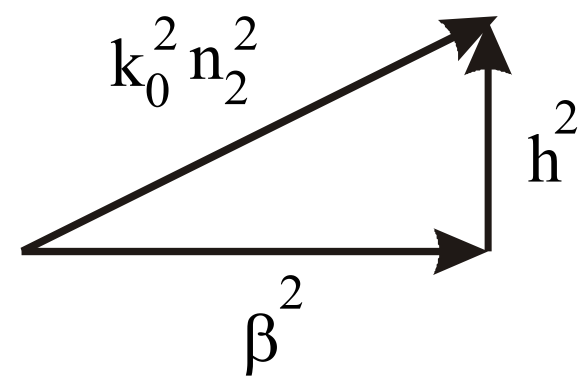


$$E_y^I = Ae^{-qx}, x > 0$$

$$q^2 = \beta^2 - k_0^2 n_1^2$$

$$h^2 = k_0^2 n_2^2 - \beta^2$$

$$E_y^{II} = B\sin hx + C\cos hx, -t < x < 0$$



$$E_y^{III} = De^{p(x+t)}, x < -t$$

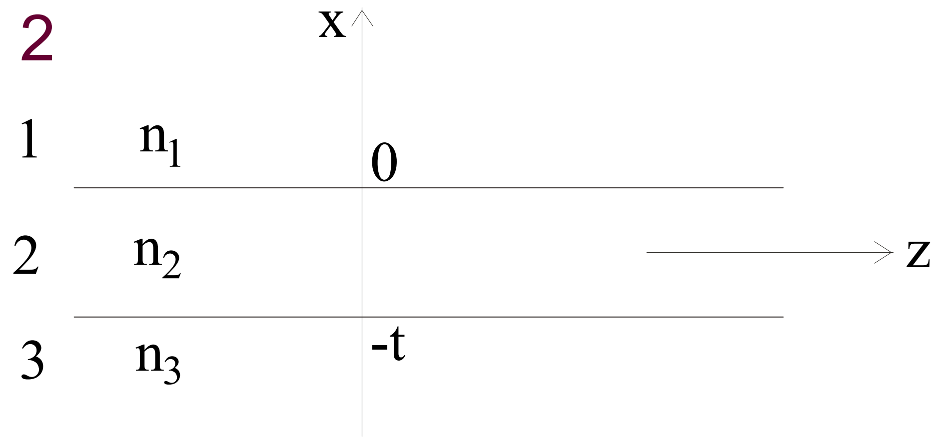
$$p^2 = \beta^2 - k_0^2 n_3^2$$

Граничные условия

Граница между областями 1 и 2

$$E_y^I(0) = E_y^{II}(0) \longrightarrow A = C$$

$$\left.\frac{\partial E_y^I}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial E_y^{II}}{\partial x}\right|_{x=0} \longrightarrow -qA = hB$$



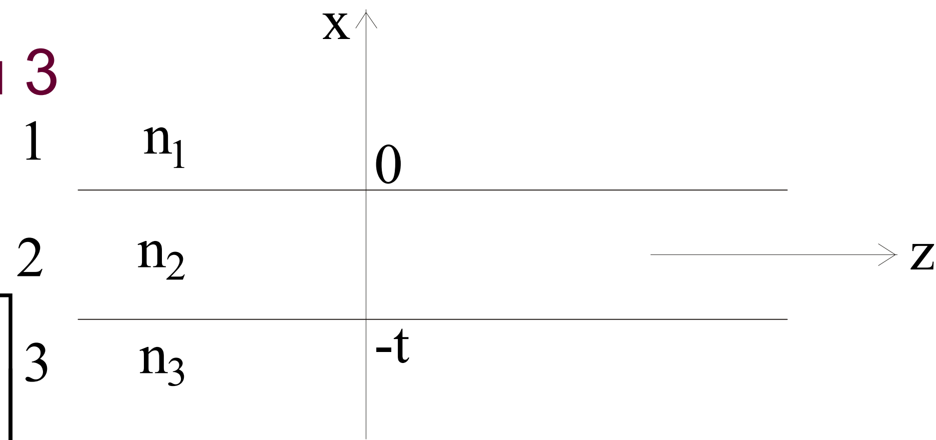
$$B = -\frac{qC}{h} \qquad -qC = hB$$

Решения в областях 1 и 2

$$E_y^I = Ae^{-qx} \qquad E_y^{II} = A\left[\cos hx - \frac{q}{h}\sin hx\right]$$

Граничные условия

Граница между областями 2 и 3



$$E_y^{II}\left(x=-t\right)=E_y^{III}\left(x=-t\right)$$

$$\longrightarrow \quad D=A\left[\cos ht+\frac{q}{h}\sin ht\right]$$

$$\left.\frac{\partial E_y^{II}}{\partial x}\right|_{x=-t}=\left.\frac{\partial E_y^{III}}{\partial x}\right|_{x=-t}$$

Решение в области 3

$$E_y^{III}=A\left[\cos ht+\frac{q}{h}\sin ht\right]e^{p\left(x+t\right)}$$

Дисперсионное соотношение

$$\frac{\partial E_y^{II}}{\partial x} = -Ah\sin hx - A\frac{q}{h}h\cos hx \qquad \left.\frac{\partial E_y^{II}}{\partial x}\right|_{x=-t} = Ah\sin ht - qA\cos ht$$

$$\frac{\partial E_y^{III}}{\partial x} = Ap\left[\cos ht + \frac{q}{h}\sin ht\right]e^{p(x+t)}$$

$$\left.\frac{\partial E_y^{III}}{\partial x}\right|_{x=-t} = Ap\left[\cos ht + \frac{q}{h}\sin ht\right]$$

$$h\sin ht - q\cos ht = p\cos ht + \frac{qp}{h}\sin ht$$

$$\sin ht\left[h - \frac{qp}{h}\right] = (p+q)\cos ht \longrightarrow \operatorname{tg}ht = \frac{(p+q)}{\left[h - \frac{qp}{h}\right]}$$

Частота отсечки

$$\operatorname{tg}\left(ht-\pi N\right)=\frac{h\left(p+q\right)}{h^2-pq} \qquad n_2<n_1,n_3$$

$$\upsilon=\frac{kt}{2}\left(n_2^2-n_3^2\right)^{1/2}$$ - безразмерная частота

Условие волноводного распространения нарушается при

$$\beta=k_c n_3$$ k_c - параметр отсечки

$$\operatorname{tg}\left[\left(k_c^2n_2^2-k_c^2n_3^2\right)^{1/2}t-\pi N\right]=\frac{\left(k_c^2n_2^2-k_c^2n_3^2\right)^{1/2}\left(k_c^2n_3^2-k_c^2n_1^2\right)^{1/2}}{k_c^2n_2^2-k_c^2n_3^2}$$

$$\operatorname{tg}\left[2\upsilon_c-\pi N\right]=\frac{\left(n_3^2-n_1^2\right)^{1/2}}{\left(n_2^2-n_3^2\right)^{1/2}} \qquad \upsilon_c=\frac{\pi N}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{\left(n_3^2-n_1^2\right)^{1/2}}{\left(n_2^2-n_3^2\right)^{1/2}}\right]$$

Число волноводных мод

$$\upsilon_c = \frac{\pi N}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{\left(n_3^2 - n_1^2\right)^{1/2}}{\left(n_2^2 - n_3^2\right)^{1/2}}\right]$$ - нормированная частота отсечки

$$N = 0$$ - нулевая мода

Полное число мод, поддерживаемых структурой

$$M = \left\{\frac{1}{\pi}\left[2\upsilon - \operatorname{arctg}\left(\frac{\left(n_3^2 - n_1^2\right)^{1/2}}{\left(n_2^2 - n_3^2\right)^{1/2}}\right)\right]\right\}_{\text{int}}$$

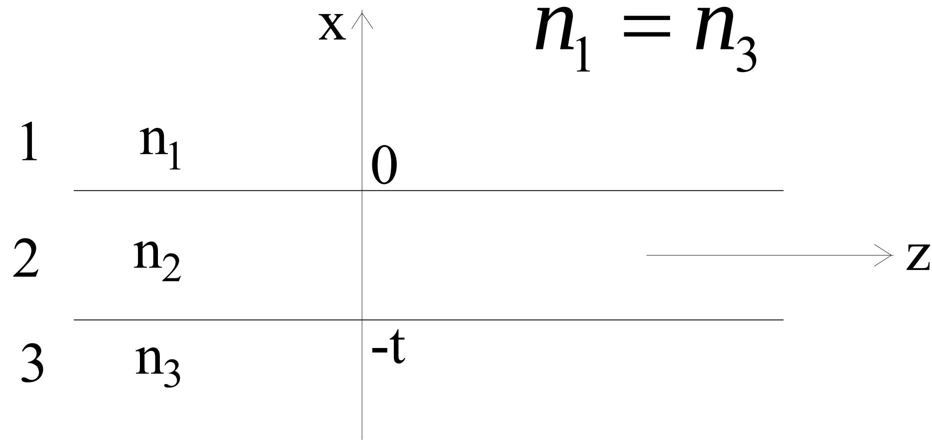
int←округленное до ближайшего целого числа

Симметричный планарный волновод

$$n_1 = n_3$$

Частота отсечки

$$\upsilon_c = \frac{\pi N}{2}$$



Число волноводных мод

$$M = \left(\frac{2\upsilon}{\pi} \right)_{\text{int}}$$

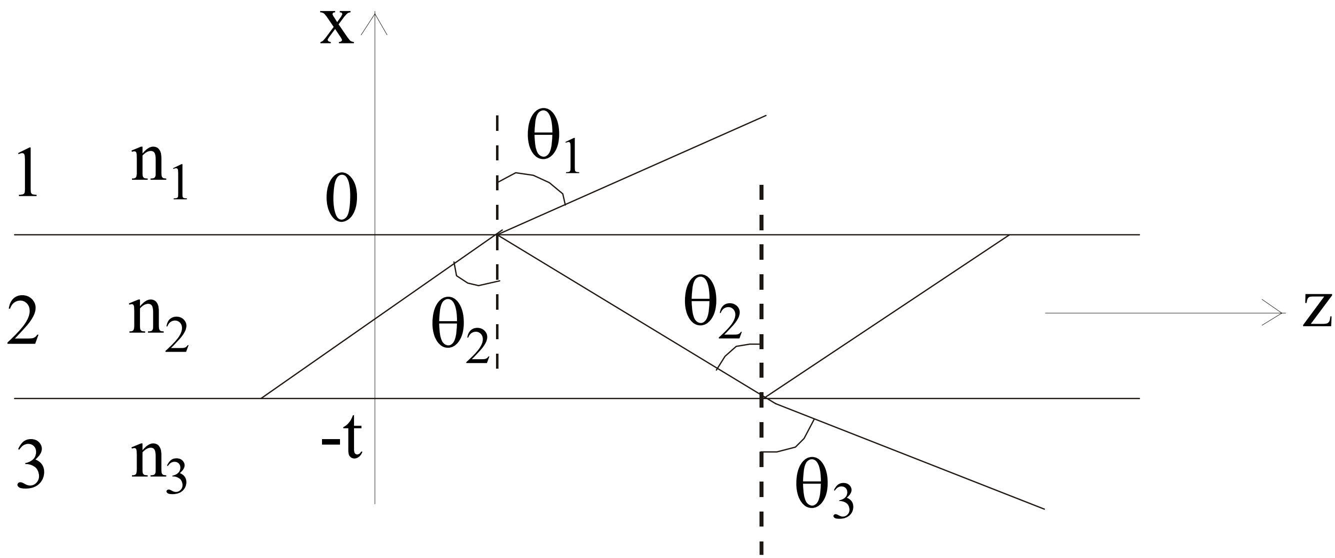
Дисперсионное соотношение

$$\operatorname{tg}\left(ht - \pi N \right) = \frac{2hq}{h^2 - q^2}$$

Приближение геометрической оптики

ПВО

$$n_2 > n_1, n_3$$

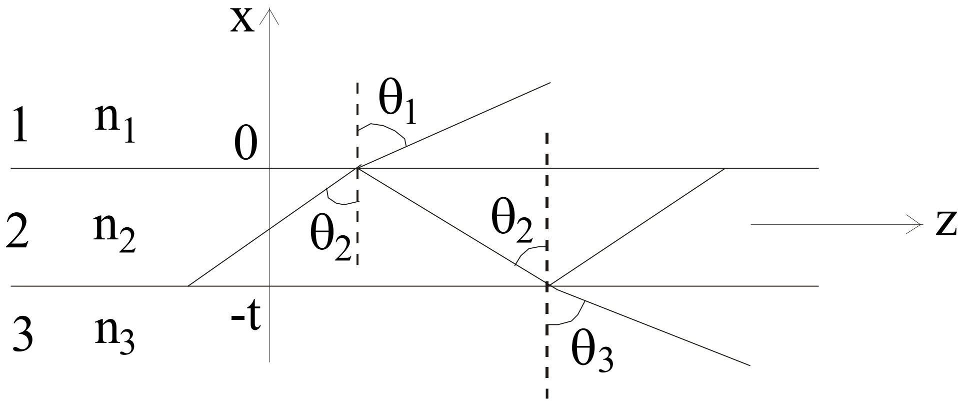


Фазовое условие существования моды

$$2t\cos\theta_2 k_0 n_2 - \delta_{21} - \delta_{23} = 2\pi N \qquad N = 0, 1, 2, \ldots$$

δ_{21} δ_{23} - скачки фазы при отражении от границ

Приближение геометрической оптики



Формула Френеля

$$\delta_{21} = 2\mathrm{arctg}\frac{\left[\sin^2\theta_2 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right]^{1/2}}{\cos\theta_2}$$

$$\delta_{21} = 2\mathrm{arctg}\frac{q}{h}$$

$$\delta_{23} = 2\mathrm{arctg}\frac{p}{h}$$

Дисперсионное соотношение

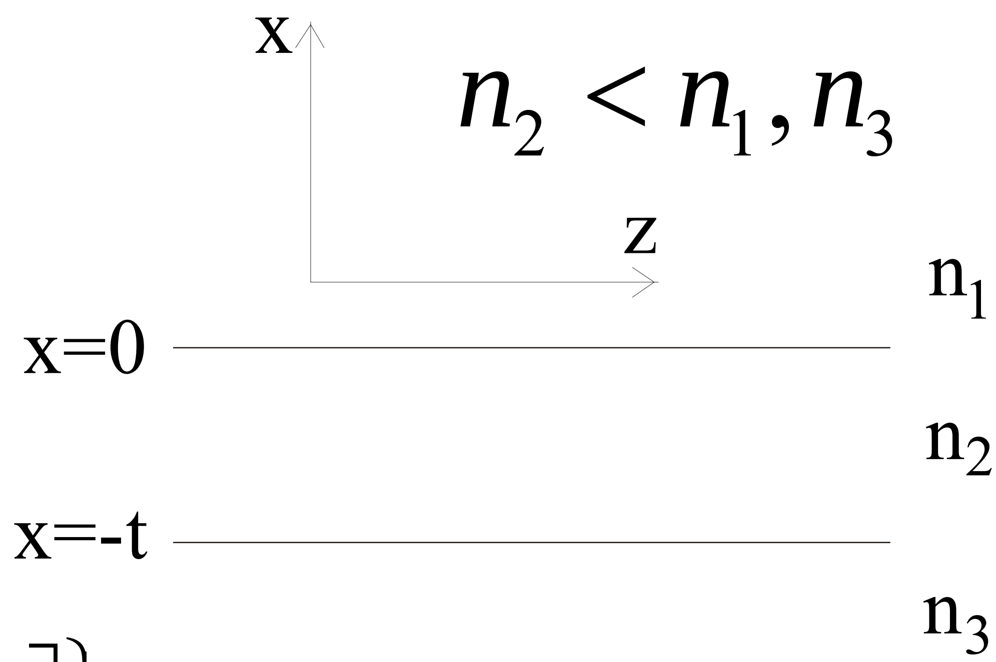
$$2ht - 2\mathrm{arctg}\frac{q}{h} - 2\mathrm{arctg}\frac{p}{h} = 2\pi N$$

Полые волноводы

$$h_i^2 = n_i^2 k_0^2 - \beta^2$$

$$n_2 < n_1, n_3$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$



Волновое уравнение

$$\left\{\nabla_{\perp}^2 + \left[\frac{\omega^2}{c^2} n^2(x,y) - \beta^2\right]\right\}\vec{E} = 0$$

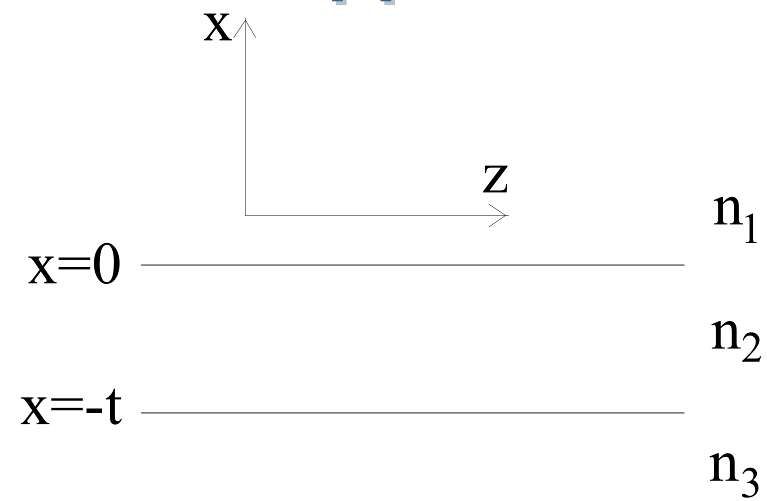
Вид решения

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y)\exp\left[-i(\omega t - \beta z)\right]$$

Поле в полом волноводе

ТЕ-моды

$$E_y = \begin{cases} A\exp\left(-ih_1 x\right), x \geq 0, \\ B\cos h_2 t + C\sin h_2 t, -t \leq x \leq 0, \\ D\exp\left[ih_3\left(x+t\right)\right], x \leq -t. \end{cases}$$

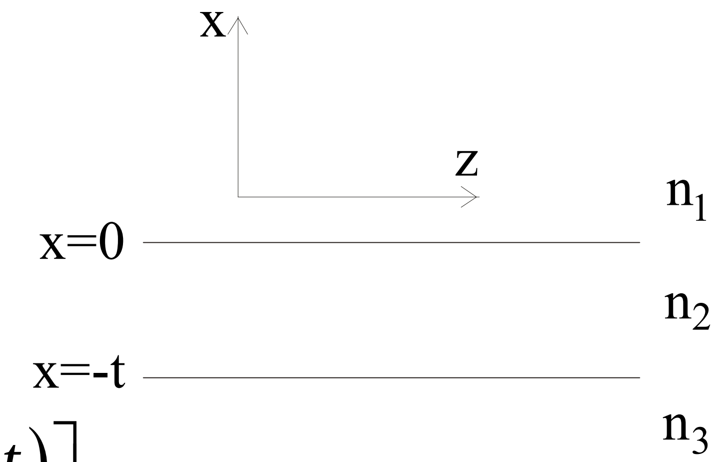


Граничные условия $\left. E_y^I \right|_{x=0} = \left. E_y^{II} \right|_{x=0}$ $\longrightarrow$ $A = B$

$$\left. \frac{\partial E_y^I}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial E_y^{II}}{\partial x} \right|_{x=0} \longrightarrow \quad -ih_1 A = h_2 C \qquad C = -i\frac{h_1}{h_2}A$$

$$E_y^{II} = A\left[\cos h_2 x - i\frac{h_1}{h_2}\sin h_2 x\right]$$

Дисперсионное соотношение



Граничные условия на границе 2 - 3

$$D = A\left[\cos h_2 t + i\frac{h_1}{h_2}\sin h_2 t\right]$$

$$E_y^{III} = A\left[\cos h_2 t + i\frac{h_1}{h_2}\sin h_2 t\right]\exp\left[ih_3\left(x+t\right)\right]$$

Равенство производных на границе 2 – 3 дает

$$-\cancel{A}h_2\sin h_2\left(-t\right) - i\cancel{A}\frac{h_1}{\cancel{h_2}}\cancel{h_2}\cos h_2 t = \cancel{A}\left[\cos h_2 t + i\frac{h_1}{h_2}\sin h_2 t\right]ih_3$$

Дисперсионное соотношение

$$\sin h_2 t\left[h_2 + \frac{h_1}{h_2}h_3\right] = \cos h_2 t\left[ih_3 + ih_1\right]$$

Дисперсия и постоянные распространения

Дисперсионное соотношение

$$\operatorname{tg} h_2 t = i h_2 \frac{h_1 + h_3}{h_2^2 + h_1 h_3}$$

Постоянные распространения - комплексные

$$\beta = \beta_0 - \frac{i}{2}\alpha$$

Случай сильно локализованных мод

$$h_2 \ll h_1, h_3$$

$$\operatorname{tg} h_2 t \approx i h_2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} \right)$$

$$h_2^{(1)} = \frac{\pi s}{t}$$

Последовательные приближения

$$h_2 = h_2^{(1)} + h_2^{(2)} + \ldots$$

$$\operatorname{tg} h_2^{(1)} t = 0 \qquad h_2^{(1)} t = \pi s$$

$$s = 1, 2, 3, \ldots$$

Постоянные распространения полых волноводов

В первом приближении

$$\beta = n_2 k_0 \qquad h_1^2 = n_1^2 k_0^2 - n_2^2 k_0^2 \qquad h_3^2 = n_3^2 k_0^2 - n_2^2 k_0^2$$

Второе приближение

$$\operatorname{tg} h_2^{(2)} t = i \frac{\pi s}{t} \left(\frac{1}{k_0 \left(n_1^2 - n_2^2 \right)^{1/2}} + \frac{1}{k_0 \left(n_3^2 - n_2^2 \right)^{1/2}} \right)$$

$$h_2 \simeq \frac{\pi s}{t} + i \frac{\pi s}{k_0 t^2} \left(\frac{1}{\left(n_1^2 - n_2^2 \right)^{1/2}} + \frac{1}{\left(n_3^2 - n_2^2 \right)^{1/2}} \right)$$

Постоянные распространения

$$\beta = \left(n_2^2 k_0^2 - h_2^2\right)^{1/2} \approx n_2 k_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{h_2^2}{n_2^2 k_0^2}\right)$$

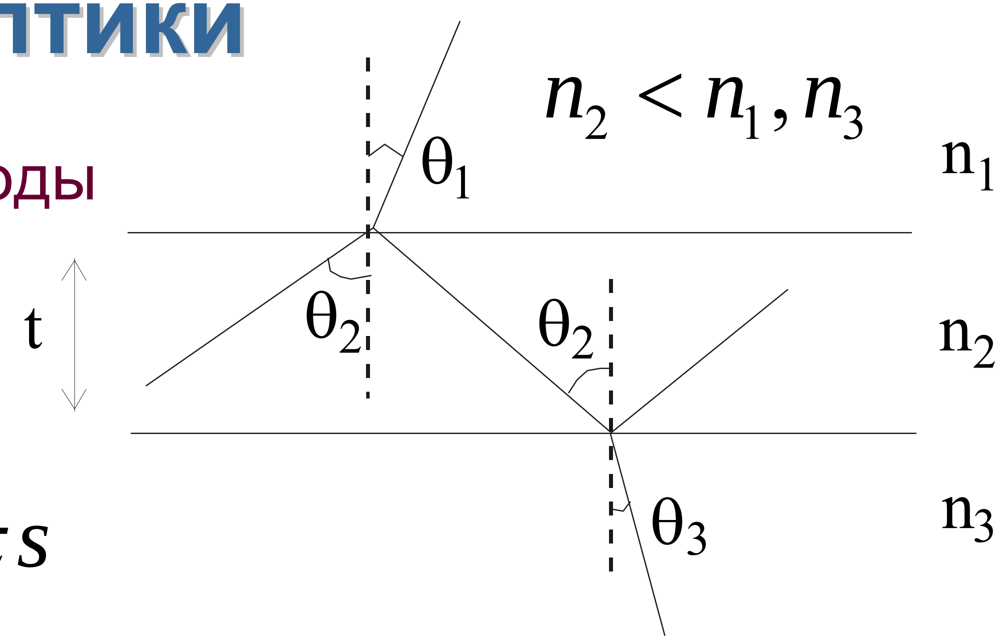
$$\beta = \left[\left(a+b\right)^2 \simeq a^2 + 2ab, b \ll a\right] =$$

$$= n_2 k_0 \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi s}{t}\right)^2 \frac{1}{n_2^2 k_0^2}\right] - \cancel{n_2}\,\cancel{k_0}\,\frac{\pi s}{t}\, i\, \frac{\pi s}{\cancel{k_0}\, t^2}\left[\frac{1}{\left(n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2}} + \frac{1}{\left(n_3^2 - n_2^2\right)^{1/2}}\right]\frac{1}{n_2^{\cancel{2}} k_0^2}$$

$$\beta = \underbrace{\overbrace{n_2 k_0}^{\text{материальная дисперсия}}\left[1 - \overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi s}{n_2 k_0 t}\right)^2}^{\text{дисперсия волноводных мод}}\right]}_{\beta_0} \underbrace{- i\left(\frac{\pi s}{k_0}\right)^2 \frac{1}{n_2}\frac{1}{t^3}\left[\frac{1}{\left(n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2}} + \frac{1}{\left(n_3^2 - n_2^2\right)^{1/2}}\right]}_{\alpha}$$

затухание $\alpha \sim t^{-3}$

Приближение геометрической оптики



Условие существования моды

скачок фазы = π

$$h_2 t = \pi s$$

$$h_2 t = k_0 n_2 \cos\theta_2 t = \pi s$$

Потери при отражении от стенок $\longrightarrow$ $e^{-\alpha L}$

Число пар отражений на длине *L*

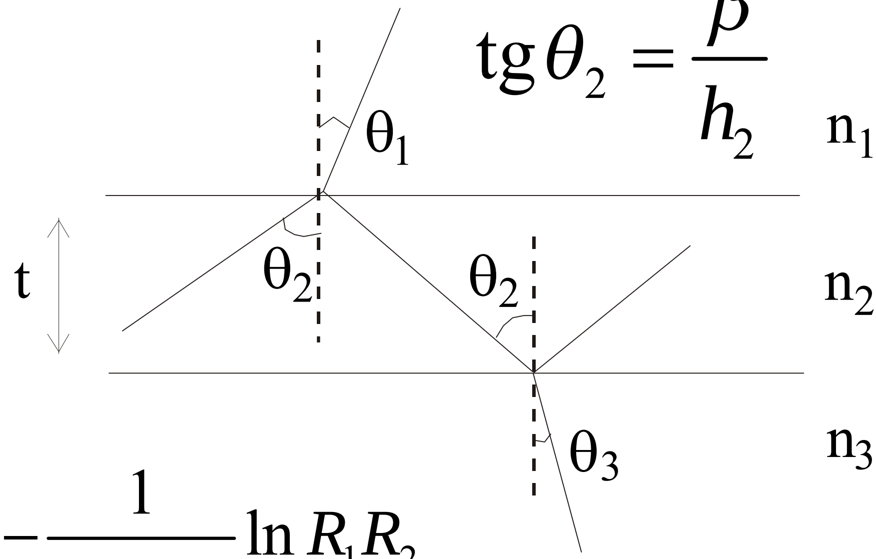
$$2t\,\mathrm{tg}\,\theta_2 = \Delta L$$

$$N = \frac{L}{2t\,\mathrm{tg}\,\theta_2}$$

Потери в полом волноводе

$$\left(R_1R_2\right)^N = e^{-\alpha L}$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\beta}{h_2}$$



$R_{1,2}$ – коэффициенты отражения

$$N \ln R_1R_2 = -\alpha L$$

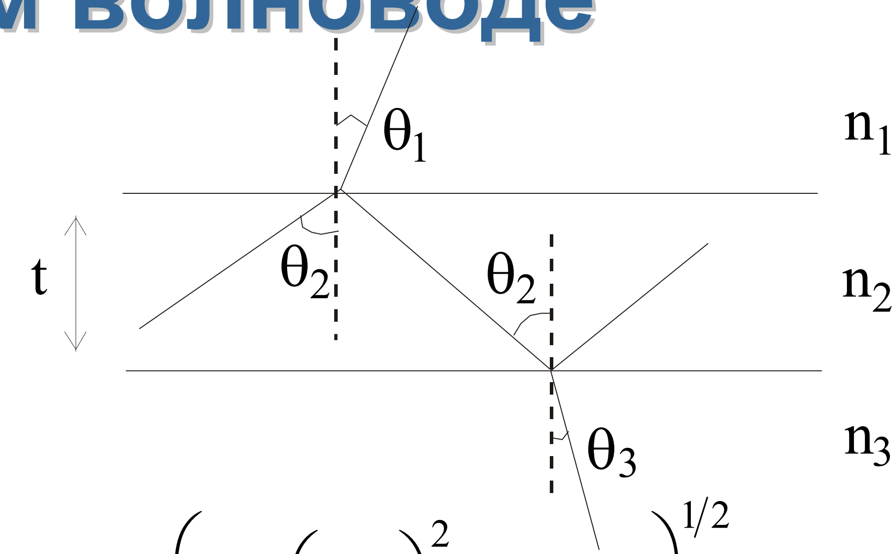
$$\frac{\cancel{L}}{2t\operatorname{tg}\theta_2}\ln R_1R_2 = -\alpha \cancel{L} \longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2t\operatorname{tg}\theta_2}\ln R_1R_2$$

$$\alpha = -\frac{h_2}{2\beta t}\ln\left(R_{21}R_{23}\right)$$

Формулы Френеля

$$R_{21} = 1 - 4\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1} \qquad R_{23} = 1 - 4\frac{n_2\cos\theta_2}{n_3\cos\theta_3}$$

Потери в полом волноводе



$$h_2 = \frac{\pi s}{t} \qquad \beta = k_0 n_2$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$\cos\theta_1 = \left(1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2\theta_2\right)^{1/2} \qquad \cos\theta_3 = \left(1 - \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2 \sin^2\theta_2\right)^{1/2}$$

В режиме сильной локализации

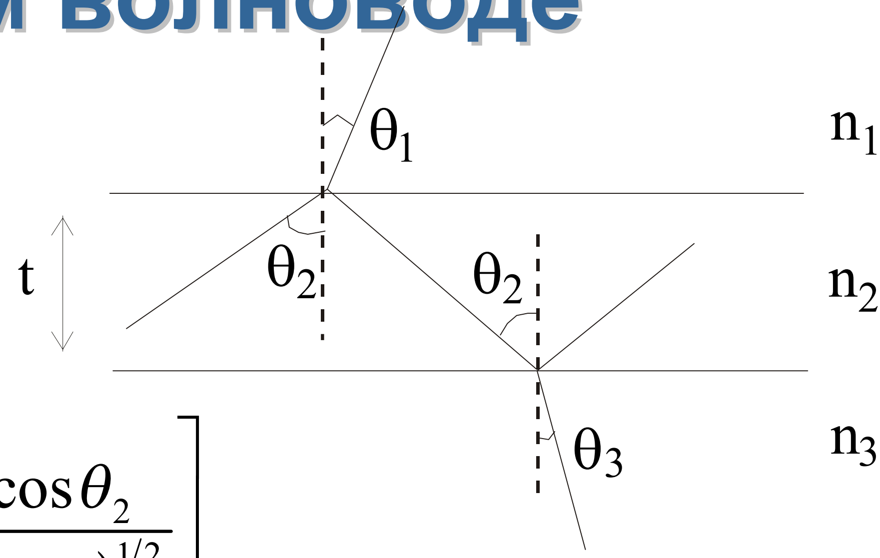
$$\theta_2 \to \frac{\pi}{2}\left(\approx \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \cos\theta_1 \approx \left(1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\cos\theta_3 \approx \left(1 - \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2\right)^{1/2}$$

Потери в полом волноводе

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$n_2 \cos\theta_2 = \frac{\pi s}{k_0 t}$$



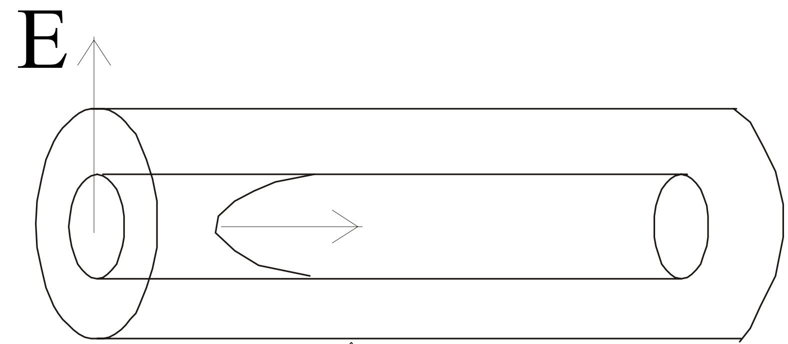
$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\pi s}{t}\frac{1}{k_0 n_2}\frac{1}{t}\left[-4\frac{n_2\cos\theta_2}{\left(n_1^2-n_2^2\right)^{1/2}} - 4\frac{n_2\cos\theta_2}{\left(n_3^2-n_2^2\right)^{1/2}}\right]$$

$$\alpha = 2\left(\frac{\pi s}{k_0}\right)^2 \frac{1}{n_2}\frac{1}{t^3}\left[\frac{1}{\left(n_1^2-n_2^2\right)^{1/2}} + \frac{1}{\left(n_3^2-n_2^2\right)^{1/2}}\right]$$

Симметричный волновод:
$n_1 = n_3 = n$; $n_2 = 1$

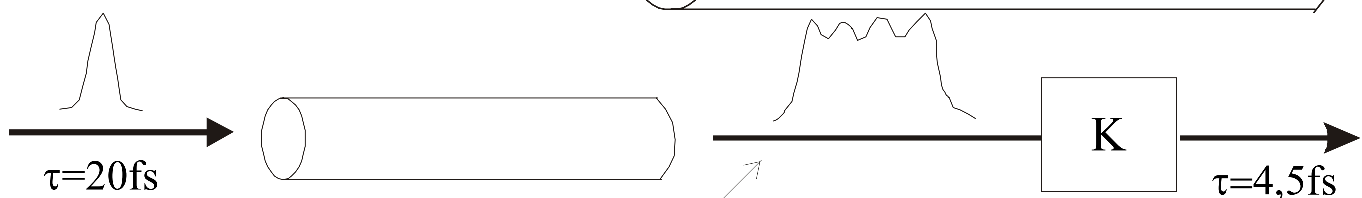
$$\alpha = \frac{4}{t^3}\left(\frac{\pi s}{k_0}\right)^2 \frac{1}{\left(n^2-1\right)^{1/2}}$$

Приложения полых волноводов



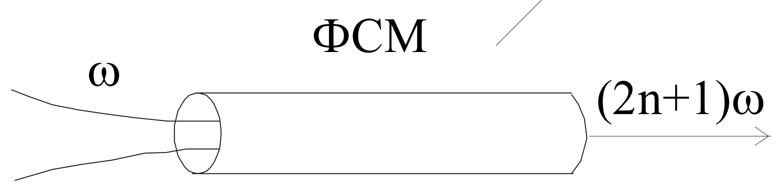
Газовые лазеры

Каналирование холодных атомов

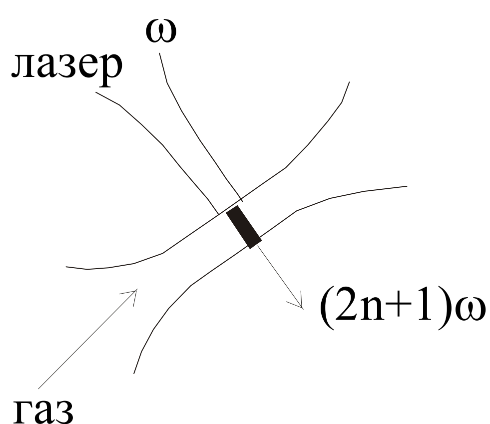


Генерация коротких импульсов

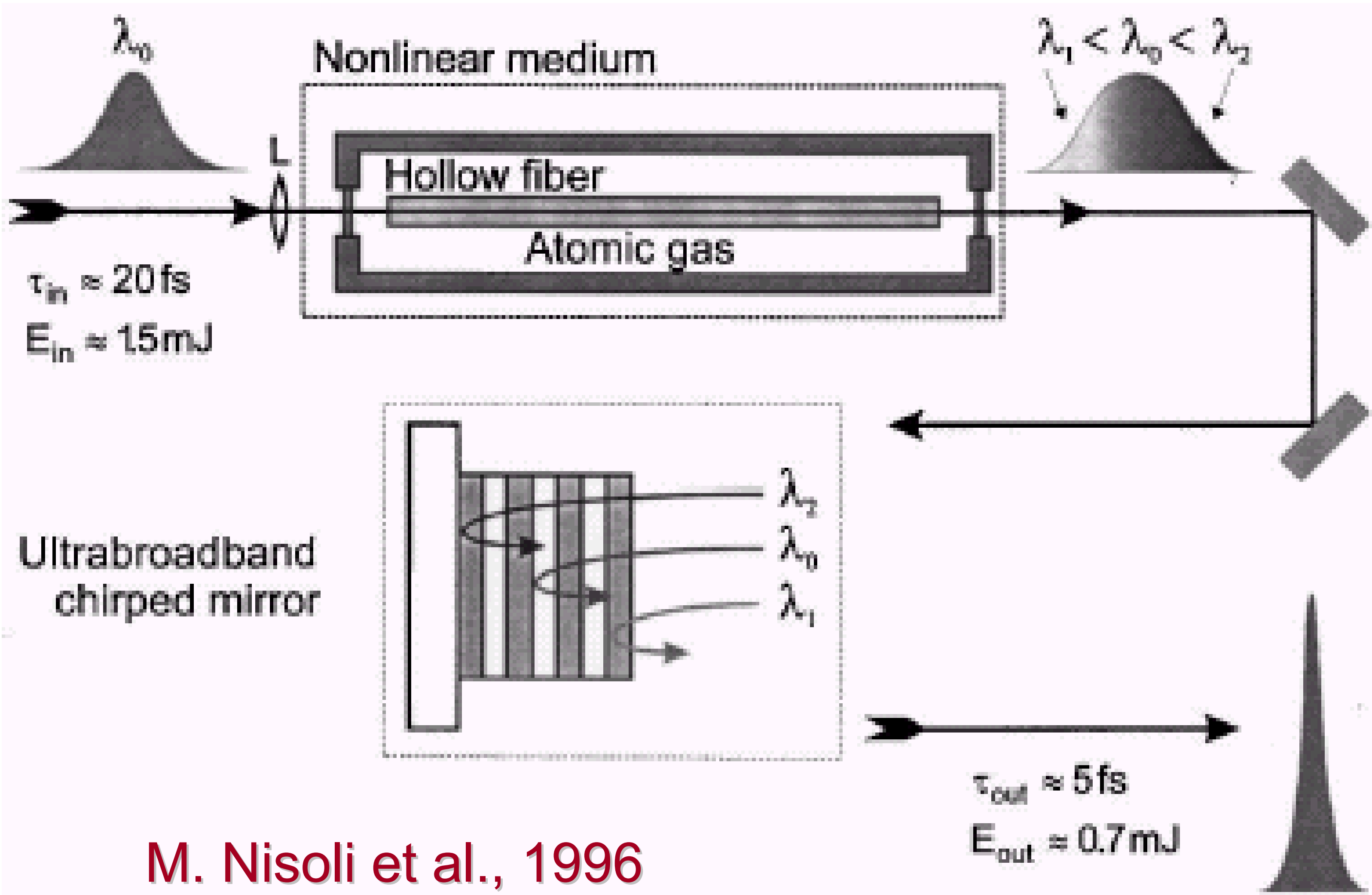
ФСМ, ВКР



Генерация оптических гармоник



Генерация сверхкоротких импульсов в полых волноводах



M. Nisoli et al., 1996